OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - BRĂILA, 22 februarie 2015
CLASA A X-A

1. Se dau relațiile

$$5\left[\left(x+y\right)^2+\log_2^2 y\right]=\left[x+\log_2\left(2^y\cdot y^2\right)\right]^2 \quad (1)$$

și

$$4^y=4y\left(3x+4\right). \quad (2)$$

a) Să se demonstreze că nu există $x,y\in\left(0,+\infty\right)$ care verifică relația (1).

b) Să se determine $x,y\in\mathbb{R}$ care verifică simultan relațiile (1) și (2).

Gabriel Daniilescu, Brăila

2. Determinați perechile de numere complexe $\left(u,v\right)$ cu $\left|u\right|=\left|v\right|=1$ astfel încât

$$\left|1-u\right|+\left|v^2+1\right|=\left|1-v\right|+\left|u^2+1\right|=\sqrt{2}.$$

Marius Damian, Brăila

3. Fie $m,n\in\mathbb{N},\ m,n\geq 2$ și $x_1,x_2,x_3,x_4\in\left[0,+\infty\right)$ astfel încât $x_1+x_2+x_3+x_4=4.$

a) Demonstrați că $\sqrt[m]{x_1}\cdot\sqrt[n]{x_2}+\sqrt[m]{x_2}\cdot\sqrt[n]{x_3}+\sqrt[m]{x_3}\cdot\sqrt[n]{x_4}+\sqrt[m]{x_4}\cdot\sqrt[n]{x_1}\leq 4.$

b) Când are loc egalitatea la a)?

Gheorghe Alexe, Brăila

4. Să se determine toate funcțiile $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ care îndeplinesc condiția:

$$x+\sqrt{x}-f\left(x\right)=\sqrt{f\left(f\left(x\right)\right)},\ \forall x\in\mathbb{N}.$$

Gabriel Daniilescu, Brăila